CHAPITRE 4 : PRIMITIVES ET INTEGRALES

I. RESUME DE COURS

I. Primitives

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que F'=f sur I.

$$\left|\begin{array}{l}\bullet\ F \text{ est dérivable sur } I,\\ \bullet\ F' = f \text{ sur } I.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I}$$

2. Propriétés

1) Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

2) Soit F une primitive de f sur un intervalle I ; alors :

*** Pour tout réel k, la fonction G=F+k est aussi une primitive de f sur I.**

**** Toute primitive de f sur I est de ce type.**

3) Etant donné un réel x_0 de I et un réel quelconque y_0, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$. Autrement dit, Une seule des courbes passe par un point donné $M_0(x_0, y_0)$.

4) Toute primitive F de f sur un intervalle I est continue sur I.

3. Tableau des primitives usuelles.

Fonction f	Primitives de f	Commentaire
$x \mapsto a$, a réel constant	$x \mapsto ax + k$	Sur $I = \mathbb{R}$
$x \mapsto ax^n$; $n \neq -1$ entier relatif	$x \mapsto \frac{a}{n+1}x^{n+1} + k$	Sur $\mathbb{R}$, si $n \in \mathbb{N}$ Sur $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$, si $n \leq -2$.
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{-1}{x} + k$	Sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$	Sur $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$x \mapsto \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + k$	Sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

4. Opérations sur les primitives :

Soient u et v des fonctions dérivables de dérivées continues sur un intervalle sur I.

Fonction f	Une primitive de f
au' , a réel	au
$u'+v'$	$u+v$
$u'u^n$; $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$v'\times(u'ov)$	uov
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$u'\times e^u$	e^u

II – Intégrale

1. Définition et propriétés

1) Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b des réels de I. On appelle Intégrale de a à b de f le nombre réel noté $\int_a^b f(t)dt$ et défini par F(b)-F(a) où F est une primitive quelconque de f sur I.

f est continue, de primitive F sur un intervalle I, et $a,b \in I$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = ... = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Propriétés

2.1) Propriétés algébriques immédiates

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$; (Relation de Chasles).

2.2) Linéarité de l'intégrale

$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;\quad \lambda \in IR$

$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2.3) Positivité de l'intégrale

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est positive sur $[a,b]$.

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

- f et g sont continues sur $[a,b]$,
- $f \leq g$ sur $[a,b]$.

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2.4) Inégalité de la moyenne

- f est continue sur $[a,b]$,
- $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a,b]$.

$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

2.5) Parité, périodicité et intégration

- f est continue sur $[-a,a]$,
- f est paire.

$\Rightarrow \int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ est continue sur } [-a,a],\\ \bullet\ f \text{ est impaire.}\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R},\\ \bullet\ f \text{ est périodique de période T.}\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt}$$

3. Valeur moyenne d'une fonction f sur un segment [a, b]

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ est continue sur } [a,b],\\ \bullet\ a < b,\\ \bullet\ \mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{le nombre réel } \mu \text{ est appelé}\\ \text{valeur moyenne de f sur } [a,b]\end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ est continue sur } [a,b],\\ \bullet\ a < b.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{il existe } c \in [a,b] \text{ tel que}\\ f(c) = \mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt\end{array}}$$

4. Intégration par parties

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

En abrégé : $\int uv' = uv - \int u'v$

5. Intégration par changement de variable

$$\boxed{\int_a^b f(g(x)) \times g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt}$$

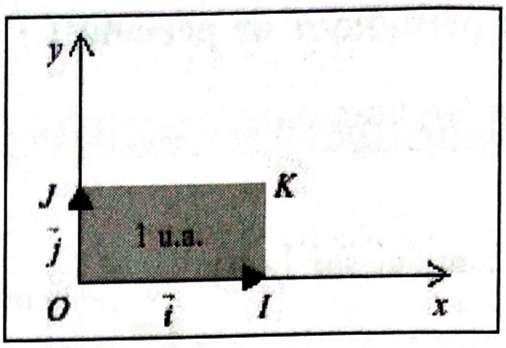
Disposition pratique de calcul :

En posant $t = g(x)$**, on obtient :**

$$\begin{cases} x = a \Rightarrow t = g(a) \\ x = b \Rightarrow t = g(b) \end{cases} ;\ \text{et}\quad dt = g'(x)dx.$$

6. Calcul d'aire

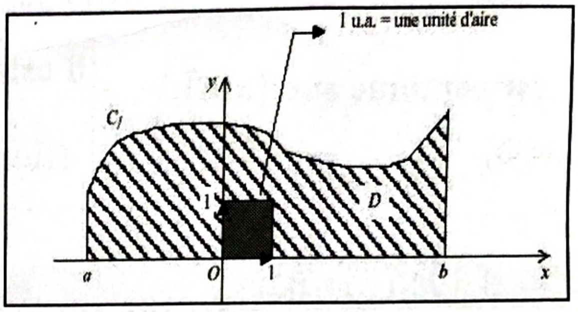
Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient I, J et K les points définis par : $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OK}=\vec{i}+\vec{j}$.



On appelle unité d'aire (notée en abrégé u.a.) l'aire du rectangle construit à partir des points OIJK.

$$\text{Aire}(\text{rectangle OIKJ}) = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| = 1 \text{ ua}$$

Théorème



Soit f une fonction continue et positive sur le segment [a, b] avec $a\leq b$. L'aire, exprimée en u.a., du domaine D délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$ est calculée par $\int_a^b f(t)dt$.

Remarques

1) Le domaine en question peut être décrit comme l'ensemble des points M(x,y) tels que: $\begin{cases} a\leq x\leq b \\ 0\leq y\leq f(x)\end{cases}$.

2) Soit f une fonction continue et négative sur le segment [a, b].
L'aire, exprimée en u.a., du domaine D délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations x =a et x =b est égale à

$$A = -\int_a^b f(x)dx \times u.a.$$

3) Soient f et g deux fonctions continues et définies sur un segment [a, b]. On suppose que $f \geq g$ sur [a, b]. L'aire A du domaine D délimité par les courbes C_f, C_g, et les deux droites verticales d'équations x =a et x =b est donnée, en u.a., par : $A = \int_a^b (f(x)-g(x))dx \times u.a.$

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Choisir la bonne réponse :

1	Une primitive de la fonction $x \mapsto 3x^2+2x+5$ sur $\mathbb{R}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto \frac{3}{4}x^4+x^2+5x$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{3}x^3+2x^2+5x$
	Réponse C	$x \mapsto x^3+x^2+5x+8$
	Réponse D	$x \mapsto x^3+x^2-5x+k$

2	Une primitive de la fonction $x \mapsto 6x\cos(3x^2)$ sur $\mathbb{R}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto 6x\sin(3x^2)$
	Réponse B	$x \mapsto \sin(3x^2)$
	Réponse C	$x \mapsto 3x^2\sin(3x^2)$
	Réponse D	$x \mapsto 3x^2\sin(x^3)$

3	Une primitive de la fonction $x \mapsto 3x(3x^2+1)^{2020}$ sur $\mathbb{R}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto \frac{1}{2}\times\frac{1}{2021}(3x^2+1)^{2021}$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{3}\times\frac{1}{2021}(3x^2+1)^{2021}$
	Réponse C	$x \mapsto \frac{3}{2}\times\frac{1}{2021}(3x^2+1)^{2021}$
	Réponse D	$x \mapsto \frac{3}{2}x^2\times\frac{1}{2021}(3x^2+1)^{2021}$

4	Une primitive de la fonction $x \mapsto \sin x \cos x$ sur $\mathbb{R}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto -\cos x \sin x$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{2}\cos^2 x$
	Réponse C	$x \mapsto \frac{1}{2}\sin^2 x$
	Réponse D	$x \mapsto \frac{-1}{2}\cos^2 x$

5	Une primitive de la fonction $x \mapsto \tan^2 x$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ est	
	Réponse A	$x \mapsto \frac{1}{3}\tan^3 x$
	Réponse B	$x \mapsto 1+\tan^2 x$
	Réponse C	$x \mapsto x+\tan x$
	Réponse D	$x \mapsto -x+\tan x$

6	Une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur $]0;+\infty[$ est	
	Réponse A	$x \mapsto \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
	Réponse C	$x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$
	Réponse D	$x \mapsto \frac{3}{2}(x+1)\sqrt{x+1}$

QCM 2

Choisir la bonne réponse :

1	Soit $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{11}dt$. Alors :	
	Réponse A	$0<I<1$
	Réponse B	$-1<I<0$
	Réponse C	$I=0$
	Réponse D	$I=\frac{\pi}{12}$

2	La valeur moyenne de la fonction $f(x)=\cos x$ sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ est égale à :	
	Réponse A	$\frac{\sqrt{3}-1}{6\pi}$
	Réponse B	$\frac{1-\sqrt{3}}{3\pi}$
	Réponse C	$\frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi}$
	Réponse D	$\frac{\sqrt{3}+1}{3\pi}$

3	Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n dt$. Alors la suite (U_n) est :	
	Réponse A	croissante
	Réponse B	décroissante
	Réponse C	non monotone
	Réponse D	divergente

4	Pour tout réel x on pose $F(x)=\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$. Alors la fonction F est :	
	Réponse A	positive sur $\mathbb{R}$
	Réponse B	croissante sur $\mathbb{R}$
	Réponse C	décroissante sur $\mathbb{R}$
	Réponse D	paire

5	Pour tout entier naturel n on pose $U_n=\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$. Alors on a :	
	Réponse A	$U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1}$
	Réponse B	$U_{n+1}+U_n=\frac{1}{n+1}$
	Réponse C	$U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+2}$
	Réponse D	$U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+3}$

6	Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a toujours :	
	Réponse A	$\int_0^1 f(t)\times g(t)dt=\int_0^1 f(t)dt\times\int_0^1 g(t)dt$
	Réponse B	$\int_0^1 (f(t)+g(t))dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 g(t)dt$
	Réponse C	$\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}dt=\frac{\int_0^1 f(t)dt}{\int_0^1 g(t)dt}$
	Réponse D	$\int_0^1 \sqrt{f(t)}dt=\sqrt{\int_0^1 f(t)dt}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$$

$$f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^5} + 4x - 1$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$$

Exercice 2

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = 5x^7(x^8+1)^{3000}$$

$$f_2(x) = \tan^{2020} x + \tan^{2022} x$$

$$f_3(x) = \frac{6x^2+4x+4}{x^2(x+2)^2}$$

Exercice 3

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une.

$$f_1(x) = \cos x\sqrt{4-\sin x}$$

$$f_2(x) = \frac{3\sin x}{\sqrt{8+2\cos x}}.$$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par: $f(x) = \cos x \sin x(\cos^{10} x + \sin^{10} x)$

1) Déterminer une primitive de f.

2) Calculer $I = \int_0^{\pi} f(x)dx$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3}{(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a ; b et c tels que : $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+1)^2}$

2) En déduire une primitive de f.

Exercice 6

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par: $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

On pose $I = \int_0^1 \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$:;. $J = \int_0^1 \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$

Calculer f'(x); en déduire I et J.

Exercice 7

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$;

1) Calculer I+J

2) En utilisant une intégration par parties, calculer I-J ,

3) En déduire I et J.

Exercice 8

On pose $I = \int_0^1 x^2(x-1)^{2022}dx$

1)Déterminer les réels a; b et c tels que : $\forall x \in IR, \quad x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

2) En déduire I.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) On constate que la fonction $f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$ est la somme de fonctions continues sur $]0;+\infty[$ et de primitives usuelles :

$$f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + 5 \times \frac{-1}{x^2} + 3.$$

En consultant la table des primitives on trouve qu'une primitive de f_1 sur $]0;+\infty[$ est: $F_1(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3} \times 2\sqrt{x} + 5 \times \frac{1}{x} + 3x$.

2) Pour f_2 on peut écrire $f_2(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-5} + 4x - 1$.

On sait qu'une fonction du type $x \mapsto ax^n, n \neq -1$ a une primitive du type $x \mapsto \frac{a}{n+1}x^{n+1}$.

Alors une primitive de f_2 sur $]0;+\infty[$ est:

$$F_2(x) = \frac{2}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + \frac{3}{-4}x^{-4} + \frac{4}{2}x^2 - x$$

Soit $$F_2(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{4}x^{-4} + 2x^2 - x$$

Enfin $$F_2(x) = \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{3}{4x^4} + 2x^2 - x.$$

3) En consultant la table des primitives on trouve qu'une primitive de la fonction $f_3(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ est :

$$F_3(x) = \tan x + \frac{7}{2}\cos 2x.$$

Corrigé 2

Dans chaque cas, on procède à un changement d'écriture pour faire apparaître une forme de primitive usuelle :

1) $f_1(x) = 5x^7(x^8+1)^{3000}$

On a $f_1(x) = \frac{5}{8} \times 8x^7(x^8+1)^{3000}$

Il est clair qu'on va utiliser la forme $u'u^n$ pour obtenir la primitive $F_1(x) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{3001}(x^8+1)^{3000}$ de f_1 sur $\mathbb{R}$.

2) On a $f_2(x) = \tan^{2020} x + \tan^{2022} x$.

On peut écrire $f_2(x) = (1+\tan^2 x)\tan^{2020} x$.

On sait qu'une fonction du type $u'u^n, (n \neq -1)$ a une primitive de la forme $\frac{1}{n+1}u^n$.

Alors on trouve que la fonction $F_2(x) = \frac{1}{2021}(\tan x)^{2021}$ est une primitive de f_2 sur $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$.

3) On a $f_3(x)=\dfrac{6x^2+4x+4}{x^2(x+2)^2}$.

Pour tout réel strictement positif, on peut procéder à une décomposition d'éléments simples en écrivant:

$$f_3(x)=\frac{5x^2+x^2+4x+4}{x^2(x+2)^2}$$

$$f_3(x)=\frac{5x^2+(x+2)^2}{x^2(x+2)^2}$$

$$f_3(x)=\frac{5x^2}{x^2(x+2)^2}+\frac{(x+2)^2}{x^2(x+2)^2}$$

Enfin, $f_3(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{x^2}$.

On sait qu'une fonction du type $\dfrac{u'}{u^2}$ a une primitive de la forme $\dfrac{-1}{u}$.

Donc, une primitive de $f_3(x)=\dfrac{6x^2+4x+4}{x^2(x+2)^2}$ sur $]0;+\infty[$ est :

$$F_3(x)=-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{x}$$

Corrigé 3

Chacune des fonctions f_1 et f_2 est continue sur $\mathbb{R}$. Alors elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

1) On peut écrire $f_1(x)=-(-\cos x)\sqrt{4-\sin x}$

$f_1(x) = -(-\cos x)(4-\sin x)^{\frac{1}{2}}$

On sait qu'une fonction du type $u'u^n, (n \neq -1)$ a une primitive de la forme $\frac{1}{n+1}u^n$.

Alors on trouve que la fonction $F_1(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(4-\sin x)^{\frac{1}{2}+1}$ est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $F_1(x) = -\frac{2}{3}(4-\sin x)\sqrt{4-\sin x}$

2) On peut aussi écrire $f_2(x) = -3 \times \frac{-2\sin x}{2\sqrt{8+2\cos x}}$ pour faire apparaître la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ dont la primitive est du type $\sqrt{u}$.

Alors la fonction $F_2(x) = -3\sqrt{8+2\cos x}$ est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$.

Corrigé 4

1) On développe l'expression de $f(x)$:

$f(x) = \cos x \sin x(\cos^{10} x + \sin^{10} x) \Leftrightarrow f(x) = \sin x \cos^{11} x + \cos x \sin^{11} x$.

Alors on peut écrire : $f(x) = -(-\sin x)\cos^{11} x + \cos x \sin^{11} x$

On sait qu'une fonction du type $u'u^n, (n \neq -1)$ a une primitive de la forme $\frac{1}{n+1}u^n$.

Alors on trouve que la fonction $F(x) = \frac{-1}{12}\cos^{12} x + \frac{1}{12}\sin^{12} x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) On a $\int_0^{\pi} f(x)dx = [F(x)]_0^{\pi}$

Donc $\quad I = \left(\frac{-1}{12}\cos^{12}\pi + \frac{1}{12}\sin^{12}\pi\right) - \left(\frac{-1}{12}\cos^{12}0 + \frac{1}{12}\sin^{12}0\right)$

Enfin $\quad I = 0$.

Corrigé 5

La fonction f est définie par: $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3}{(x+1)^2}$.

1) On peut écrire $\quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 4}{(x+1)^2}$

$$f(x) = \frac{(x+1)^3 - 4}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^2}$$

Donc $\quad f(x) = x + 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$ pour tout réel x strictement positif.

Donc $a = 1; b = 1; c = -4$.

2) On sait qu'une primitive de $x \mapsto x+1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x$

Une primitive de $x \mapsto -\frac{4}{(x+1)^2}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est $x \mapsto \frac{4}{x+1}$.

On en déduit que la fonction $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{4}{x+1}$ est une primitive de la fonction $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Corrigé 6

1) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

Donc $f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

L'intégrale $I=\int_0^1\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ peut être transformée sous la forme :

$I=\int_0^1\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})dx$ du type $I=\int_0^1 f'(x)f(x)dx$.

D'où $I=\left[\frac{1}{2}(f(x))^2\right]_0^1$. Alors $I=\left[\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2\right]_0^1$.

$I=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{2}(1)^2$

$I=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}$. Enfin $I=1+\sqrt{2}$.

L'intégrale $J=\int_0^1\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$ peut être transformée sous la forme :

$$J=\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}dx$$

d'où $J=\int_0^1 f'(x)\frac{1}{f^2(x)}dx=\int_0^1\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx$.

$$J=\left[\frac{-1}{f(x)}\right]_0^1$$

$$J=\left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$$

$$J=\frac{-1}{1+\sqrt{2}}+1\ .$$

Enfin $J=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Corrigé 7

1) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin^2 x+x\cos^2 x)dx$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin^2 x+\cos^2 x)dx$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx$$

$$I+J=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I+J=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-0^2\right)$$

$I+J=\frac{\pi^2}{8}$.

2) On a $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin^2 x - x\cos^2 x)dx$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin^2 x-\cos^2 x)dx$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x\cos 2x)dx$

On utilise une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x)=-x \\ v'(x)=\cos 2x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x)=-1 \\ v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$

$I-J=\left[-x\times\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{2}\sin 2x)dx$

$I-J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)dx$

$I-J=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I-J=-\frac{1}{4}\cos\pi+\frac{1}{4}\cos 0$

$I-J=\frac{1}{2}$

On résout le système : $\begin{cases} I+J=\dfrac{\pi^2}{8} \\ I-J=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Par addition : $2I=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{1}{2} \Rightarrow I=\dfrac{\pi^2+8}{16}$

Par soustraction : $2J=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{1}{2} \Rightarrow J=\dfrac{\pi^2-8}{16}$.

Corrigé 8

1) On peut écrire pour tout réel x :

$x^2=((x-1)+1)^2=(x-1)^2+2(x-1)+1$. Donc $a=1; b=2; c=1$

2) On remplace $x^2=((x-1)+1)^2=(x-1)^2+2(x-1)+1$ dans l'intégrale $I=\int_0^1 x^2(x-1)^{2022}dx$ par son écriture trouvée dans 1) :

$$I=\int_0^1\left((x-1)^2+2(x-1)+1\right)(x-1)^{2022}dx$$

On développe $I=\int_0^1\left((x-1)^{2024}+2(x-1)^{2023}+(x-1)^{2022}\right)dx$

Comme la dérivée de $(x-1)$ est 1, les termes à intégrer sont tous du type $u'u^n$ de primitive $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$:

$$I=\left[\frac{1}{2025}(x-1)^{2025}+\frac{2}{2024}(x-1)^{2024}+\frac{1}{2023}(x-1)^{2023}\right]_0^1$$

$$I=-\frac{1}{2025}+\frac{2}{2024}-\frac{1}{2023}.$$

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 4x^5 - \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3x^2} + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = 9x^5(2x^6+1)^{1000}$$

$$f_3(x) = 5x\sqrt{3x^2+1}$$

$$f_4(x) = 7x\sqrt[3]{3x^2+1}$$

$$f_5(x) = \tan^2 x + \tan^4 x$$

Exercice 2

Calculer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$f_1(x) = 5x\sqrt{x+1}$$

$$f_2(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+5}{\sqrt{x+1}}$$

$$f_3(x) = \frac{3x^2-6x+9}{2x^2(x-3)^2}$$

Exercice 3

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{x\sin x\cos x - \sin^2 x}{x^3}dx$.

1) Calculer la dérivée de la fonction $u(x) = \frac{\sin x}{x}$.

2) En déduire une primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{x\sin x\cos x-\sin^2 x}{x^3}$.

3) Calculer l'intégrale I .

Exercice 4

On se propose de calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi} x\cos x dx$ par deux méthodes :

1) On considère la fonction suivante : $f(x)=x\cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction $u(x)=x\sin x$.

b) En déduire une primitive de f.

c) Calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

2) Calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi} x\cos x dx$ en utilisant une intégration par parties.

3) Comparer les résultats.

Exercice 5

On considère l'intégrale $I=\int_0^{\pi}\sin^2 x\cos^2 x dx$.

1) Donner l'expression linéaire de $\sin^2 x\cos^2 x$.

2) Calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi}\sin^2 x\cos^2 x dx$.

Exercice 6

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $g(x)=\dfrac{-1}{x+1}$.

1) Etudier les variations de f et g et tracer leurs courbes respectives C et C' dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) Calculer l'aire du domaine plan limité par C, C' et les droites d'équations $x = -3$; $x = -2$.

Exercice 7

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$.

1) Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n).

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que : $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

Exercice 8 (Traduit)

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx$; $n \geq 0$ **1) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 1$, $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$** **2) Calculer I_0** **3) En déduire I_1 et I_2.**	**نضع $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx$ حيث $n \geq 0$.** **1) باستخدام مكاملة بالتجزئة أثبت أن لكل $n \geq 1$ فإن:** **$(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$** **2) احسب I_0.** **3) استنتج I_1 و I_2 .**